T_λ 近傍における超流動ヘリウムFilm

京大・理　大見哲巨
名大・理　碓井恒丸

（6月30日受理）

1. Introduction

先の論文[1]において，Pitaevskii[2]の凝縮体の波動関数に対する現象論的方程式を改良することにより，T_λの下から近づいた時の第1音波の減衰異常を矛盾なく説明することができた。

我々の理論のPitaevskii との違いの主な点は次のようなものであった。

まず，流れの密度とエネルギー密度は

$$j=\frac{m^2}{m^*}\left(\frac{-i}{2}\right)(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)$$

$$+m\left(n-\frac{m}{m^*}|\Psi|^2\right)\vec{V}_n$$

$$E=E_0+\frac{1}{2m^*}|-i\nabla\Psi|^2+\frac{1}{2}m\left(n-\frac{m}{m^*}|\Psi|^2\right)\vec{V}^2{}_n$$

で与えられる。ここでm^*とE_0は粒子密度n，エントロピー密度$S=n\sigma$及び$|\Psi|^2$の関数である。また超流体の密度は$n_s=\frac{m}{m^*}|\Psi|^2$である。

次に，Ψに対する方程式は

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2+\mu+iB\right)\Psi$$

ここで，μ．Bはエルミットにとる。

次に，Bを"inductive" な部分B_iと"resistive" な部分B_rに分ける。B_rは平衡状態へのrelaxation を受け持つ項であり，B_iはrelaxationが存在しない状態においての保存量が$|\Psi|^2$でなく，凝縮体がdepletionとの相互作用することによりrenormalize された$n_s=\frac{m}{m^*}|\Psi|^2$になる

ことから出てくる項である。
μ, B_i, B_r は具体的に,

$$\mu=\frac{\partial E_0}{\partial n}+\frac{m^*}{m}\frac{\partial E_0}{\partial|\Psi|^2}+\frac{1}{4m}\nabla\left(\frac{m^*}{m}\nabla\frac{m}{m^*}\right)$$

$$-\frac{1}{4mn}A\cdot\nabla\left(\frac{m}{m^*}\nabla|\Psi|^2\right)+A\cdot\frac{|\Psi|^2}{n}\cdot\frac{\partial E_0}{\partial|\Psi|^2}$$

$$A=\frac{\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{m}{m^*}+\left(x_0-\frac{m^*}{m}\right)\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{m}{m^*}}{\frac{m}{m^*}+x_0\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{m}{m^*}}$$

$$x_0=\frac{|\Psi|^2}{n}$$

$$B_i=-\frac{1}{4m}\left\{\frac{m^*}{m}\left(\nabla\frac{m}{m^*}\right)\left(-i\nabla-m\vec{V}_n\right)+h\cdot C\right\}$$

$$-\frac{1}{2nm}A\cdot\nabla\left\{\frac{m}{2m^*}\left[\Psi^*\left(-i\nabla-m\vec{V}_n\right)\Psi+C.C\right]\right\}.$$

$$B_r=-\Lambda\left\{\left(-i\nabla-m\vec{V}_n\right)\frac{1}{2m^*}\left(-i\nabla-m\vec{V}_n\right)+\frac{\partial E_0}{\partial|\Psi|^2}\right.$$

$$\left.+\left|\left(-i\nabla-m\vec{V}_n\right)\Psi\right|^2\cdot\frac{\partial}{\partial|\Psi|^2}\cdot\frac{1}{2m^*}\right\}$$

である。

また,全運動量テンサーは

$$\Pi=m\left(n-\frac{m}{m^*}|\Psi|^2\right)\vec{V}_n\vec{V}_n+\frac{1}{4m^*}\left(\nabla\Psi^*\nabla\Psi-\right.$$

$$\left.-\Psi^*\nabla\nabla\Psi+C.C.\right)-\frac{1}{4m}\nabla|\Psi|^2\nabla\frac{m}{m^*}$$

$$-E_0+\frac{\partial E_0}{\partial n}n+\frac{\partial E_0}{\partial S}S+\frac{\partial E_0}{\partial|\Psi|^2}|\Psi|^2$$

で与えられる。

これらの現象論的方程式の導出と,それによって第1音波,第2音波の減衰

異常を正しく説明するために，主に以下の仮定がなされた。

1. 局所平衡が成立している。
2. 非可逆現象は凝縮体の relaxation を通してのみ起こり，dissipation がない時には，$|\Psi|^2$ でなく n_s が保存する。また，この renormalization を受け持つ B_i は，$(-i\nabla - m\vec{V}n)$ という組合せでしか微分演算子を含まない。
3. Landauの２次相転移の考え方を素直に受け継いで，

$$E_0 = E_0^0(n, \sigma) + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4$$

の展開において，展開係数は $\alpha \propto \epsilon^1$，$\beta \propto \epsilon^0$ ととる。

$$\epsilon = \frac{T_\lambda - T}{T_\lambda} \ ,$$

4. damping constant $\Lambda \propto \epsilon^0$ である。

この仮定により，m^* は σ と $\frac{|\Psi|^2}{2}$ だけの関数となる。この時，前の論文[1]では，m^* の $\frac{|\Psi|^2}{n}$ 依存を落している。しかし，m^* の異常を出そうと思うと $|\Psi|^2$ 依存からしか出せないことがわかる。

3，4より，$m^* \propto^{\frac{1}{3}}$，したがって，$m^* \propto (|\Psi|^2)^{\frac{1}{3}}$ でなければならない。

また，1の仮定から，空間変化はmean free path の order まで，したがって，healing distance の order の空間変化には方程式が適用できることになっているが，妥当であるかどうか。

以上，上の仮定の有効性，方程式の適用限界を検討する為にも，film の場合の解を考えてみた。また，我々の解と，Ginzburg，Pitaevskii[3] の場合とを比較してみたい。

§ 2. Film の解

平衡，nondissipative，流れ０の場合，現象論の方程式で，$|\Psi|^2 \propto \epsilon$ healing distance $\ell \propto \epsilon^{-2/3}$ を考慮して，ϵ について最低次の近似をする。

Ψ に対する方程式で，B_i の項は高次になり，

$$\left\{ -\nabla \frac{1}{2m^*} \nabla + \left(\frac{\partial}{\partial (\Psi)^2} \frac{1}{2m^*} \right) (\nabla \Psi)^2 + \frac{\partial E_0}{\partial (\Psi)^2} \right\} \Psi$$

$$= 0 . \qquad \Psi : \mathrm{real} \qquad (1)$$

$$\mu_{eq}(n, \sigma) - \frac{\beta}{m} \left(\frac{\partial n_0}{\partial n} \right)_s \left\{ \Psi^2 - \Psi_{eq}^2 (n, \sigma) \right\}$$

$$= \mathrm{const.} \qquad (2)$$

また，運動量テンサー$\Pi = \mathrm{const}$ も最低次の近似で，

$$P_{eq}(n. \sigma) - n\beta \left(\frac{\partial n_0}{\partial n} \right)_\sigma \left\{ \Psi^2 - \Psi_{eq}^2 (n, \sigma) \right\}$$

$$= \mathrm{const.} \qquad (3)$$

但し，$\Psi_{eq}(n, \sigma)$ は与えられた n，σ での bulk の場合の平衡値であり，$\mu_{eq}(n, \sigma)$，$P_{eq}(n, \sigma)$ はその時の化学ポテンシャル及び圧力である。2），3）式は，それぞれ化学ポテンシャル，圧力が空間的に一定であることを表わしている。
また，この二つの式から，温度が空間的に一定という結果を導くことができる。

n，σ の空間変化を考える。境界での n，σ の変化をÅの order で変化する normal fluid でも考えられる部分と，Ψ が存在することによる healing distance の order で変化する部分に分けて考える。T_λ に充分近づけば，後者(healing distance) は長くなり，前者は表面だけの変化と考えることができる。この時，その表面で Ψ に対する境界条件をどのようにとるかが問題になる。境界を自由表面にとった場合には，表面で n に大きな変化があり，その時 Ψ がどのような変化をするかは解らない。壁に接している境界*) を考えると，この場合には n にそれほど大きな変化がなく，Ψ はゼロから始まると考えて良さそうである。

*）壁からの van der Waals 力の Ψ に対する影響は，現象論方程式では，n，σ の変化を通してあらわれる。圧力が変化することによる T_λ の変化及び

nの変化はT_λに充分近づけばhealing distanceに比較すれば壁の近くでのみ問題となり無視できる。

n，σのΨによる変化を，与えられたp，Tでのbulk の平衡値n_e，σ_eを基準にとり，

$$n = n_e + \Delta n$$

$$\sigma = \sigma_e + \Delta \sigma$$

のように表わす。

(2)，(3)をΔn，$\Delta \sigma$について解いて，これを(1)式に代入する。

結果はGinzburg Pitaevskii [3]の場合同様，下の式で与えられるGibbs Free energy に対する変分問題と同じになる。

$$G = G_0(P, T) - \beta \Psi_{eq}^2(P, T)\Psi^2 + \frac{1}{2}\beta \Psi^4 + \frac{1}{2m^*}(\nabla \Psi)^2 \qquad (4)$$

空間変化は一次元的に起こる場合を考え，その方向の座標をXとする。

次に，dimensionless の量を

$$\varphi = \frac{\Psi}{\Psi_{eq}}, \quad \frac{1}{\ell^2} = \frac{\beta \Psi_e^{\frac{8}{3}}}{\gamma}, \quad \xi = \frac{\chi}{e}$$

を導入する。

ここで，γは，

$$\frac{1}{2m^*} = \gamma \frac{1}{\Psi^{2/3}}$$

で定義する。

以上より，無次元のorder parameter φに対する方程式は，

$$\left\{ -\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\varphi^{2/3}}\frac{d}{d\xi} - \frac{1}{3\varphi^{\frac{8}{3}}}\left(\frac{d}{d\xi}\varphi\right)^2 - 1 + \varphi^2 \right\}\varphi = 0 \qquad (5)$$

これは，$\varphi^{1/3} d\xi = dt$に変数変換することにより簡単に解くことができる。

第1積分は，

$$2\frac{1}{\varphi^{2/3}}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2+2\varphi^2-\varphi^4=C \qquad (6)$$

Cは積分定数。

半無限の場合には境界条件は，

$$\xi=0 \quad , \varphi=0 ; \quad \xi\to\infty, \ \varphi\to 1$$

となる。したがって，C＝1である。
全領域でのφのふるまいは，数値的にしか解けないが$\xi\to 0$，$\xi\to\infty$での漸近形は求めることができ，

$$\xi\to 0 \qquad \varphi=\left(\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}$$

$$\xi\to\infty \qquad \varphi=1-\mathrm{const}\times e^{-\xi}$$

となる。

次に，filmの場合の解を求める。
filmの厚さをdとして，境界条件を

$$\xi=0, \quad \varphi=0 \quad ; \quad \xi=\frac{d}{2\ell}, \quad \frac{d\varphi}{d\xi}=0$$

のようにとる。
6）式より，$\xi=\frac{d}{2\ell}$の時のφをφ_0とすると，

$$\varphi_0=\sqrt{1-\sqrt{1-C}}$$

となる。したがって，積分定数Cを決める式は，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{d}{3\ell}=\int_0^{\varphi_0^{2/3}}\frac{du}{\sqrt{u^6-2u^3+C}} \qquad (7)$$

7）式をCの関数とみてグラフに表わすとFig. 1 のようになる。C→1では半無限の場合に近づき，d→∞，C→0ではdが$(C)^{-1/6}$で発散する。
したがって，Ginzburg, Pitaevskii の場合と異なって，厚さdを与えた時φに対する二つの解が存在することがわかる。

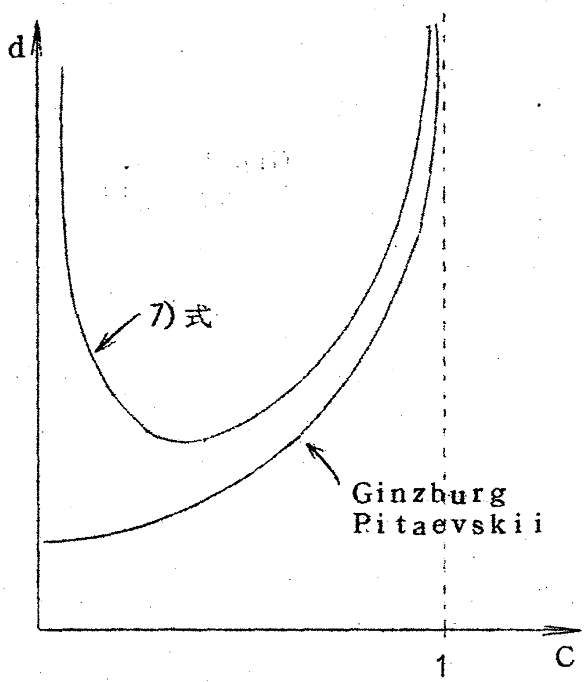

Fig. 1

この二つの解のうちどちらが安定に存在するかはFree Energyを比較してみなければならない。

§ 3. Free Energy の比較

4）式より，超流動Filmの Free Energy は常流動Filmと比較して，単位面積あたり，

$$\Delta G=2\ell\beta\Psi_{eq}^{4}\int_{0}^{\frac{d}{2\ell}}\left\{\varphi^{2}-\frac{1}{2}\varphi^{4}-\frac{1}{\varphi^{2/3}}\left(\frac{d}{d\xi}\varphi\right)^{2}\right\}d\xi$$

だけ低くなる。

6）式を用い，また積分変数 ξ から φ に変換すると，

$$\Delta G=2\ell\beta\Psi_{eq}^{4}\left\{-\frac{3}{2}\int_{0}^{\varphi_0^{\frac{2}{3}}}du\sqrt{u^{6}-2u^{3}+C}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}C\int_{0}^{\varphi_0^{\frac{2}{3}}}\frac{du}{\sqrt{u^{6}-2u^{3}+C}}\right\} \qquad (8)$$

これから，C＝0の点を除けば，Δ Gminimum の点は，7）式 dの minimum と一致することがわかる。

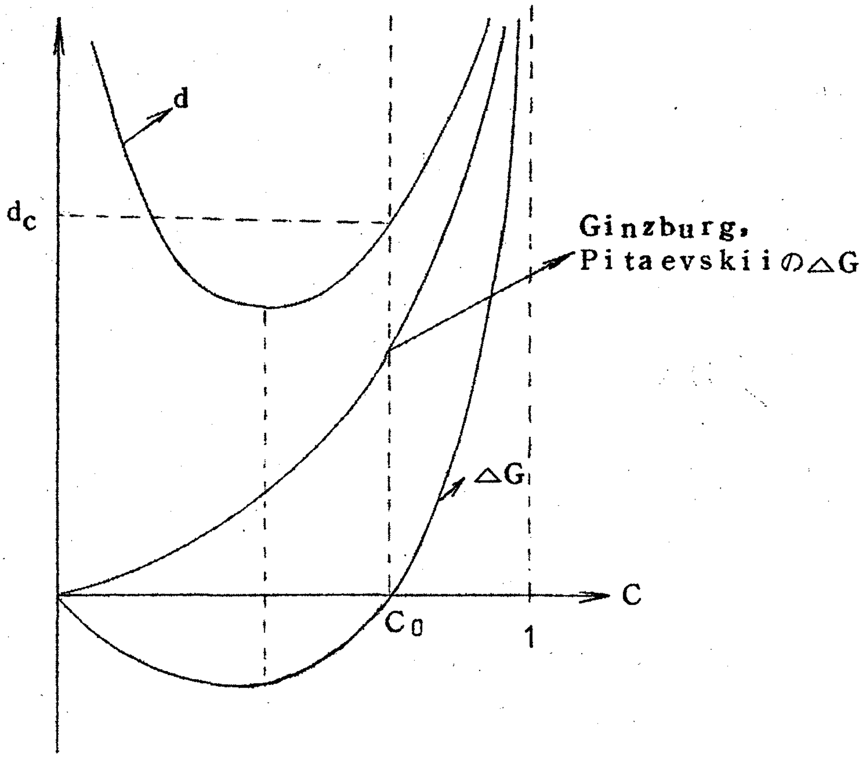

Fig. 2

Fig. 2にdとΔGをCの関数と考えた時のグラフを示した。
ΔGは，C_0以下では負になっている。したがって，この点で与えられるdをd_cとすると，この点で相転移を起こしてこれより薄いFilmは存在しないことがわかる。
また，Ginzburg，Pitaevskiiの場合のΔGは，$C=0$で$\Delta G=0$となっている為，この相転移は二次であったが，我々の場合は，有限からとぶ一次の相転移である。
d_c及び$d=d_c$の時のρ_sの平均値を数値計算した結果を次に示す。

$$d_c = 6.29\,\ell$$

$$\frac{\overline{\rho_s}}{\rho_{s0}} = 0.395 \qquad (9)$$

ρ_{s0}はρ_sのbulkの値である。

相転移が一次になるという現象は，現在Third Soundの実験[4]において見つかっている。但しこの場合，温度がT_λから離れていること，又，境界条件の一方が自由表面であることなどから我々の結果が適用できるかどうか疑問

である。しかし，Ψが小さいところ，したがって壁に近いところでは，T_λから離れた温度においても我々の理論が適用できる。また，壁から離れてΨが大きくなれば，Ψのふるまいは修正されるであろうが，相転移の時$\varphi_0^2 = 0.66$であることから，その修正はそれほど大きくないと思われる。

Third Soundの実験から得られるonset の時の$\bar{\rho}_s / \bar{\rho}_{s0}$は0.37と我々の結果と非常によく一致している。

最近[5]，Ginzburg－Pitaevskii の理論を用いて，熱力学的安定性の条件$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial d^2}\right)_{n.T}$（両側を壁で挟めばこの条件は不要）を超流動部分だけで満足させるには，$\bar{\rho}_s / \rho_{s0} \geqq 0.36$でなければならないという計算がある。しかし，正確には，$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial d^2}\right)_{n.T}$への常流動部分からの寄与を考慮しなければならない。これを正しく取り扱うのは難しいが，Van der Waals ポテンシャルからくるdに依存するFree Energy を estimate すると超流動部分のFree Energyに比較して非常に大きい。上の熱力学的な安定条件は，むしろ常流動部分で保障されていると思われる。

Reference

1) T. Usui, Prog. Theor. Phys. 41 (1969), 1603.
2) L. P. Pitaevskii, Soviet Phys.－JETP 8 (1959), 282.
3) V. L. Ginzburg and L. P. Pitaevskii, Soviet Phys.－JETP. 7 (1958), 858.
4) R. S. Kagiwada, J. C. Fraser, I. Rudnick and D. Bergmann, Phys. Rev. Letters 22, (1969), 338.
5) G. Dukek and H. Stenschke, J. Low Temp. Phys. 3 (1970) 249.